製程能力指標之廣義信賴區間

張揖平*
東吳大學商用數學系
100 台北市貴陽街一段 56 號

摘要

本文主要利用 Weerahandi [31, 32] 提出之廣義信賴區間 (generalized confidence interval) 的想法，探討 Vännman [25] 提出之一般化製程能力指標 (process capability index) 的區間估計問題，並且證明其廣義信賴區間亦為某種型式之貝氏信賴區間 (Bayesian confidence interval)。

關鍵詞：製程能力指標，廣義信賴區間，貝氏信賴區間

1. 前言

製程能力指標 (process capability index) 是一個評估製程能力的有效方法，文獻上曾提出許多型式之製程能力指標，包括 Juran [8] 提出之 C_p 指標，其定義為:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \tag{1}$$

其中 USL 和 LSL 分別表示製程之品質特性值的規格上限 (upper specification limit) 與規格下限 (lower specification limit)，σ 為製程之品質特性值的標準差 (standard deviation)，而 $d = (USL - LSL)/2$ 為規格區間 (specification interval) 長度之一半。由於 C_p 指標並未考慮到製程之品質特性值的均數 (mean) μ 及目標值 (target value) T，故 Kane [9] 及 Chan, Cheng and Spiring [3] 分別提出 C_{pk} 指標和 C_{pm} 指標，其定義分別為:

$$C_{pk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sigma} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sigma} \tag{2}$$

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E((X-T))^2}} = \frac{d}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \tag{3}$$

其中 $M = (USL + LSL)/2$ 為規格區間之中心，X 表示製程之品質特性值，由於 C_{pm} 之分母代表田口損失函數 (參考 Taguchi [21, 22]) 的期望值，因此 C_{pm} 指標比 C_p 及 C_{pk} 指標更能敏感的反應出製程的期望損失，有關製程能力指標 C_p、C_{pk} 和 C_{pm} 之關係可參考 Kotz and Johnson [11]。而 Pearn, Kotz and Johnson [17] 結合 C_{pm} 及 C_{pk} 指標的優點，提出了 C_{pmk} 指標，其定義為:

$$\begin{aligned} C_{pmk} &= \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \\ &= \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} \end{aligned} \tag{4}$$

有關這些製程能力指標的相關性質與應用可參考 Kotz and Johnson [10] 和 Kotz and Lovelace [12] 等。最近，Vännman [25] 提出一般化製程能力指標 (a unified approach to process capability index)，稱為 $C_p(u,w)$ 指標，其定義為:

$$C_p(u,w) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + w(\mu - T)^2}} \tag{5}$$

其中 u 和 w 為大於或等於 0 之常數，並且發現 $C_p(u,w)$ 和 C_p、C_{pk}、C_{pm}、C_{pmk} 之關係分別為:

$$C_p(0,0) = C_p \tag{6}$$

$$C_p(1,0) = C_{pk} \tag{7}$$

$$C_p(0,1) = C_{pm} \tag{8}$$

* 連絡人: ypchang@bmath.scu.edu.tw

$$C_p(1,1) = C_{pmk} \tag{9}$$

此外，Vännman [27, 28] 認爲在實際應用上，製程能力指標需大於 0，亦即 $u < d/|T-M|$，而目標值 T 會介於 LSL 與 USL 之間，亦即 $d/|T-M| > 1$，爲避免 u 值的取法受到不同的 T 值影響，故限制 $u \le 1$，並且考慮 $u=1$ 的情形，定義爲:

$$C_p(w) = C_p(1,w) = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + w(\mu - T)^2}} \tag{10}$$

而 Spiring [20] 亦曾提出另一製程能力指標 $C_p(0,w)$，並且討論此製程能力指標與其他製程能力指標之關係。

令 $X_1,\cdots,X_n$ 表示 n 次製程之品質特性值，且具有獨立 (independent) 之 $N(\mu,\sigma^2)$ 分配，本文主要利用 Weerahandi [31, 32] 提出之廣義信賴區間的想法，探討 Vännman [25] 提出之一般化製程能力指標 $C_p(u,w)$ 的區間估計問題，並且證明其廣義信賴區間亦爲某種型式之貝氏信賴區間 (Bayesian confidence interval)。

2. 廣義信賴區間回顧

依據 Weerahandi [31, 32] 提出之廣義信賴區間的想法，令 $\underline{X} = (X_1,\cdots,X_n)$ 表示母體之 n 個獨立可觀測之隨機向量，其分配服從 $N(\mu,\sigma^2)$，首先將未知參數 (μ,σ^2) 重參數化 (reparameterize) 爲有興趣的參數 θ 和另一個多餘參數 (nuisance parameter) δ，爲方便起見，定義符號 $\underline{\Psi} = (\theta,\delta)$ 且 $\underline{x} = (x_1,\cdots,x_n)$ 爲 $\underline{X}$ 之觀測值。

定義 2.1：令 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 爲 $\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi}$ 之函數，若 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 滿足:

(1) $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之分配和未知參數無關；

(2) $r_{obs} = R(\underline{x},\underline{x},\underline{\Psi})$ 和多餘參數無關，則 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 稱爲廣義樞紐量 (generalized pivotal quantity)。

定義 2.2：令 Θ 爲 θ 之參數空間 (parameter space)，如果 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之樣本空間子集合 $C_{1-\alpha}$ 滿足 $P(R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi}) \in C_{1-\alpha}) = 1-\alpha$，則定義 θ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義信賴區間爲:

$$\Theta_C(1-\alpha) = \{\theta \in \Theta : r_{obs} \in C_{1-\alpha}\} \tag{11}$$

這裡定義 2.1 中之條件 (1) 類似傳統樞紐量之要求，而條件 (2) 是保證當觀測到觀測值時，所計算出之廣義信賴區間與多餘參數無關。有關傳統樞紐量之定義可參考 Bain and Engelhardt [1]，其最大區別在廣義樞紐量可能和觀察值 $\underline{x}$ 有關，但傳統樞紐量則不能和觀察值有關，因此由廣義樞紐量所得到之廣義信賴區間，在計算其涵蓋機率 (coverage probability) 時，其解釋和傳統的頻率學派 (frequentist) 並不完全相同。事實上，當廣義樞紐量 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 只和 $\underline{X}$ 與 $\underline{\Psi}$ 有關，而和觀察值 $\underline{x}$ 無關時，廣義樞紐量即爲傳統之樞紐量，所計算出之廣義信賴區間即爲傳統之信賴區間。

3. 一般化製程能力指標的廣義信賴區間

爲方便起見，定義符號 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$，$S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2/n$，且 $\bar{x}$ 和 s^2 分別爲 $\bar{X}$ 和 S^2 之觀測值，則一般化製程能力指標 $C_p(u,w)$ 的一個合理的點估計值 (point estimate) 爲:

$$\hat{C}_p(u,w) = \frac{d - u|\bar{x} - M|}{3\sqrt{s^2 + w(\bar{x} - T)^2}} \tag{12}$$

而有關此估計方法的相關性質，可參考 Vännman [25, 26] 和 Vännman and Kotz [29, 30]。

本節將在 μ 和 σ^2 均未知時，推導一般化製程能力指標之廣義單尾 (one-sided) 信賴區間下界。考慮等式:

$$C_p(u,w) = \frac{d - u\left|\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{V}}Z - M\right|}{3\sqrt{\frac{nS^2}{V} + w\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{V}}Z - T\right)^2}} \tag{13}$$

其中

$$Z = \sqrt{n}\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}\right) \sim N(0,1) \tag{14}$$

$$V = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1} \tag{15}$$

且 Z 和 V 爲獨立，而 χ^2_{n-1} 爲自由度 (degrees of freedom) 是 $n-1$ 的卡方分配 (chi-square distribution)。定義:

$$R(\underline{X}, \underline{x}, \underline{\Psi}) = \frac{d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{V}}Z - M\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{V}}Z - T\right)^2}} \tag{16}$$

則 $R(\underline{X}, \underline{x}, \underline{\Psi})$ 之分配與未知參數無關，且 $R(\underline{X}, \underline{x}, \underline{\Psi})$ 之觀測值爲 $R(\underline{x}, \underline{x}, \underline{\Psi}) = C_p(u,w)$，由定義 2.1 知 $R(\underline{X}, \underline{x}, \underline{\Psi})$ 是一個廣義樞紐量，因此依據定義 2.2，製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界可由下列定理得到。

定理 3.1：一般化製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$1-\alpha = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I[d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}z - M\right| - 3c\sqrt{\frac{ns^2}{v} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}z - T\right)^2} \ge 0] \phi(z) p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dz\,dv \tag{17}$$

其中 $I(\cdot)$ 表示指標函數 (indicator function)，$\phi(z)$ 和 $p_{\chi^2_{n-1}}(v)$ 分別爲標準常態分配 (standard normal distribution) 和自由度是 $n-1$ 的卡方分配之機率密度函數 (probability density function)。

證明：由定義 2.2 知道 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(\frac{d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{V}}Z - M\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{V}}Z - T\right)^2}} \ge c\right) \\ &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty I[d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}z - M\right| - 3c\sqrt{\frac{ns^2}{v} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}z - T\right)^2} \ge 0] \phi(z) p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dz\,dv \end{aligned} \tag{18}$$

故得證。

系理 3.1 : (a) 若 $u = w = 0$，則製程能力指標 $C_p(u,w)$ (亦即 C_p) 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界爲:

$$c = \frac{d}{3}\sqrt{\frac{\chi^2_\alpha(n-1)}{ns^2}} \tag{19}$$

其中 $\chi^2_\alpha(n-1)$ 爲 χ^2_{n-1} 分配之 α-分位數 (quantile)。

(b) 若 $u = 0$ 且 $w \ne 0$，則製程能力指標 $C_p(u,w)$ (亦即 $C_p(w)$) 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \int_{v \ge n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} \{\Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - T + \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) \\ &\quad - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - T - \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\} \\ &\quad p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv \end{aligned} \tag{20}$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 爲標準常態分配之累積分配函數 (cumulative distribution function)；

$$\Delta_{u,w}(c,v) = \sqrt{\frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2 - \frac{ns^2}{v}\right)} \tag{21}$$

(c) 若 $w = 0$ 且 $u \ne 0$，則製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \int_{v \ge n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} \{\Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - M + \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) \\ &\quad - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - M - \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\} \\ &\quad p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv \end{aligned} \tag{22}$$

其中

$$\Delta_{u,w}(c,v)=\frac{1}{u}\left(d-3c\sqrt{\frac{ns^2}{v}}\right) \tag{23}$$

證明：(a) 當 $u=w=0$ 時，由 (18) 式知製程能力指標 $C_p(u,w)$（亦即 C_p）之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$1-\alpha=P\left(V\geq n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2\right) \tag{24}$$

故

$$c=\frac{d}{3}\sqrt{\frac{\chi^2_\alpha(n-1)}{ns^2}} \tag{25}$$

(b) 當 $u=0$ 且 $w\neq 0$ 時，由 (18) 式知製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P\left(\frac{d}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V}+w\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-T\right)^2}}\geq c\right)\\
&= P\{\left((\bar{x}-T)\sqrt{V}-sZ\right)^2 \leq \frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2V-ns^2\right)\}\\
&= \int_{v\geq n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} P\{-\sqrt{\frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2v-ns^2\right)} \leq (\bar{x}-T)\sqrt{v}-sZ \leq \sqrt{\frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2v-ns^2\right)}\}\, p_{\chi^2_{n-1}}(v)dv\\
&= \int_{v\geq n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} \{\Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-T+\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-T-\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\}\, p_{\chi^2_{n-1}}(v)dv\end{aligned} \tag{26}$$

其中 $\Delta_{u,w}(c,v)$ 爲 (21) 式。

(c) 當 $w=0$ 且 $u\neq 0$ 時，由 (18) 式知製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= P\left(\frac{d-u\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-M\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V}}}\geq c\right)\\
&= \int_{v\geq n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} P\{-\frac{1}{u}\left(d-3c\sqrt{\frac{ns^2}{v}}\right) \leq \bar{x}-\frac{s}{\sqrt{v}}Z-M \leq \frac{1}{u}\left(d-3c\sqrt{\frac{ns^2}{v}}\right)\}\, p_{\chi^2_{n-1}}(v)dv\\
&= \int_{v\geq n\left(\frac{3cs}{d}\right)^2} \{\Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-M+\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-M-\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\}\, p_{\chi^2_{n-1}}(v)dv\end{aligned} \tag{27}$$

其中 $\Delta_{u,w}(c,v)$ 爲 (23) 式。

事實上，製程能力指標 C_p 之廣義信賴區間下界和 Chou, Owen, and Borrego [5] 所得到之結果相同。

定理 3.2：若 $T=M$，則一般化製程能力指標 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned}1-\alpha &= \int_{\Delta_{u,w}(c,v)\geq 0} \{\Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-T+\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x}-T-\Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\}\, p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv\end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\Delta_{u,w}(c,v) = \begin{cases} \dfrac{-ud + \sqrt{u^2d^2 - \left(9wc^2 - u^2\right)\left(9c^2\dfrac{ns^2}{v} - d^2\right)}}{9wc^2 - u^2} & \text{if} \quad 9wc^2 - u^2 \neq 0 \\ \dfrac{1}{2ud}\left(d^2 - 9c^2\dfrac{ns^2}{v}\right) & \text{if} \quad 9wc^2 - u^2 = 0 \end{cases} \tag{29}$$

證明：當 $T = M$ 時，由 (18) 式知道 $C_p(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= \int_0^\infty P\left(\frac{d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}Z - T\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{v} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}Z - T\right)^2}} \geq c \right) p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv \\ &= \int_{\Delta_{u,w}(c,v)\geq 0} P\left(\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}Z - T\right| \leq \Delta_{u,w}(c,v) \right) p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv \\ &= \int_{\Delta_{u,w}(c,v)\geq 0} \left\{ \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - T + \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right) - \Phi\left(\frac{\sqrt{v}}{s}\left(\bar{x} - T - \Delta_{u,w}(c,v)\right)\right)\right\} p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dv \end{aligned} \tag{30}$$

其中 $\Delta_{u,w}(c,v)$ 爲方程式

$$d - u\Delta_{u,w}(c,v) = 3c\sqrt{\frac{ns^2}{v} + w\Delta_{u,w}(c,v)^2}$$

之正根，因爲 (31) 式之等號右邊大於或等於 0，故 $\Delta_{u,w}(c,v)$ 爲二次方程式

$$(9wc^2 - u^2)\Delta_{u,w}(c,v)^2 + 2ud\Delta_{u,w}(c,v) + 9c^2\frac{ns^2}{v} - d^2 = 0 \tag{32}$$

之正根且滿足

$$\Delta_{u,w}(c,v) \leq \frac{d}{u} \tag{33}$$

令

$$\begin{aligned} g(\Delta_{u,w}(c,v)) &= (9wc^2 - u^2)\Delta_{u,w}(c,v)^2 \\ &\quad + 2ud\Delta_{u,w}(c,v) + 9c^2\frac{ns^2}{v} - d^2 \end{aligned} \tag{34}$$

且

$$\begin{aligned} B(c,v) &= u^2d^2 \\ &\quad - (9wc^2 - u^2)\left(9c^2\frac{ns^2}{v} - d^2\right) \end{aligned} \tag{35}$$

因爲

$$\frac{d - u\left|\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}Z - T\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{v} + w\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{v}}Z - T\right)^2}} \geq c \tag{36}$$

可以保證 $d \Big/ 3\sqrt{\frac{ns^2}{v}} \geq c$，亦即 $9c^2\frac{ns^2}{v} - d^2 \leq 0$，因此由 (34) 式可知 $g(0) \leq 0$，若 $9wc^2 - u^2 > 0$，則 $B(c,v) > 0$ 且函數 $g(\Delta_{u,w}(c,v))$ 之圖形如圖 1，若 $9wc^2 - u^2 < 0$，則 $B(c,v) > 0$，函數 $g(\Delta_{u,w}(c,v))$ 之極大值發生在 $\Delta_{u,w}(c,v) = \dfrac{ud}{u^2 - 9wc^2}$ 且其圖形如圖 2，又因爲當 $9wc^2 - u^2 < 0$ 時，$\dfrac{ud}{u^2 - 9wc^2} \geq \dfrac{d}{u}$，故由 (33) 式可以得到無論 $9wc^2 - u^2 > 0$ 或 $9wc^2 - u^2 < 0$，$g(\Delta_{u,w}(c,v)) = 0$ 之正根爲:

$$\Delta_{u,w}(c,v) = \frac{-ud + \sqrt{u^2d^2 - \left(9wc^2 - u^2\right)\left(9c^2\frac{ns^2}{v} - d^2\right)}}{9wc^2 - u^2} \tag{37}$$

若 $9wc^2 - u^2 = 0$，則 $g(\Delta_{u,w}(c,v)) = 0$ 之正根爲 $\Delta_{u,w}(c,v) = \dfrac{1}{2ud}\left(d^2 - 9c^2\dfrac{ns^2}{v}\right)$，故得證。

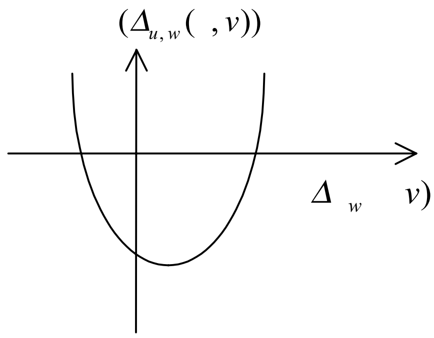

圖 1. 當 $9wc^2-u^2>0$ 時，函數 $g(\Delta_{u,w}(c,v))$ 之圖形

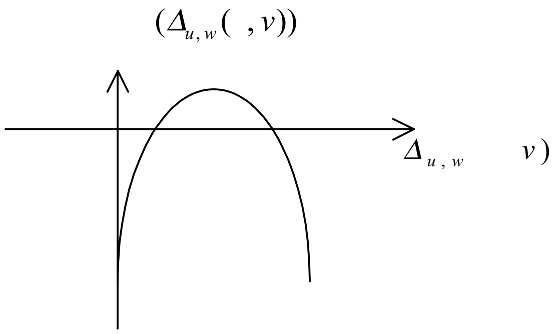

圖 2. 當 $9wc^2-u^2<0$ 時，函數 $g(\Delta_{u,w}(c,v))$ 之圖形

Meng [14]
limit of Bayesian confidence
intervals） 3.3，可以得到本節所探

定理 3.3：假設 (μ,σ^2) 具有聯合無資訊先驗分配 (non-informative prior distribution) $p(\mu,\sigma^2)\propto\sigma^{-2}$，則 $C_p(u,w)$ 之後驗分配 (posterior distribution) 和 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之分配相同。

證明：類似 Lee [13] 的證明，可以得到 (μ,σ^2) 之聯合後驗分配爲:

$$p(\mu,\sigma^2\mid\underline{x})=\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n-1}{2}}\exp\left(-\frac{ns^2}{2\sigma^2}\right)\left(\sigma^2\right)^{-\frac{1}{2}}\times\exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x}-\mu)^2\right) \tag{38}$$

令 $\mu'=\sqrt{n}(\bar{x}-\mu)/\sigma$ 且 $\tau=\sigma^{-2}$，則在觀察到 $\underline{X}=\underline{x}$ 下，$\mu'\sim N(0,1)$, $ns^2\tau\sim\chi^2_{n-1}$，且 μ' 和 $ns^2\tau$ 爲獨立，又因爲

$$C_p(u,w)=\frac{d-u\,|\mu-M|}{3\sqrt{\sigma^2+w(\mu-T)^2}}=\frac{d-u\left|\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{ns^2\tau}}\mu'-M\right|}{3\sqrt{\dfrac{ns^2}{ns^2\tau}+w\left(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{ns^2\tau}}\mu'-T\right)^2}} \tag{39}$$

比較 (16) 式可知 $C_p(u,w)$ 之後驗分配和 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之分配相同。

事實上，Shiau, Chiang and Hung [18] 在相同假設下亦得到 $C_p(0,1)$ (亦即 C_{pm}) 之貝氏信賴區間。此外，Cheng and Spiring [4] 和 Shiau, Chiang, and Hung [18, 19] 亦在不同的先驗分配假設下，得到一些製程能力指標的貝氏信賴區間下界。

本節雖然只探討了一般化製程能力指標的單尾廣義信賴區間，但可以由同樣方法得到雙尾 (two-sided) 之廣義信賴區間。

4. 一般化製程能力指標的廣義信賴區間下界的數值計算

第三節中所討論的製程能力指標的廣義信賴區間下界的求法，均需解方程式之根，但由 (18) 式知:

$$P\left(\frac{d-u\left|\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{V}}Z-M\right|}{3\sqrt{\dfrac{ns^2}{V}+w\left(\bar{x}-\dfrac{s}{\sqrt{V}}Z-T\right)^2}}\geq c\right) \tag{40}$$

爲 c 之遞減函數，故可採用二分逼近法 (bisection method) 之數值計算，求得方程式之根。此外，爲得到一般化製程能力指標之廣義區間下界，在 (18) 式中亦需求得一個雙重積分的值，其數值計算並不容易，Weerahandi [32] 曾建
若此機率不容易計算，則可採用蒙　卡羅模擬法 (Monte Carlo simulation method) 近似，亦即對固定之 c 值，重複產生模擬資　(Z_j,V_j)，然後計算:

$$\frac{-\left|-- \frac{}{\sqrt{\ _j}}\ _j -\right|}{3\sqrt{\frac{^2}{_j}+\left(-- \frac{}{\sqrt{\ _j}}\ _j -\right)}} \geq c \tag{41}$$

之比例，作爲 (18) 式中積分的近似値。

而在 (20)、(22) 和 (28) 式中，有關積分的數値計算，可採用 Golub and Welsch [6] 提出之高 二次法 (Gaussian quadrature rule) 計算，IMSL [7]之副程式 GQRUL 亦提供此高斯二次法的修正方法可供使用。

在實際應用上，當樣本數 n 很大時，則在計算 (20)、(22) 和 (28) 式中的積分時，其中之機率密度函數 $p_{\chi^2_{n-1}}(v)$ 的分子與分母均會變得很大，在數値計算上容易產生問題，本節亦提出另一近似法計算 (20)、(22) 和 (28) 式中的積分，本文以 (20) 式之積分計算爲例，(22) 和 (28) 式之積分亦可由相同方法得到其近似値。令

$$= \frac{-n^*}{\sqrt{2n^*}} \tag{42}$$

其中 $n^* = n-1$，亦即 $V = n^* + \sqrt{2n^*}Y$，則當 n 很大時，隨機變數 Y 之分配爲近似標準常態分配，由 (26) 式可得:

$$P\left(\frac{d}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V}+w\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-T\right)^2}} \geq c\right)$$

$$= P\{\left((\bar{x}-T)\sqrt{n^*+\sqrt{2n^*}Y}-sZ\right)^2$$
$$\leq \frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2\left(n^*+\sqrt{2n^*}Y\right)-ns^2\right)\}$$
$$\approx \int_{\geq\frac{1}{\sqrt{2\ ^*}}\left(\left(\frac{3}{}\right)-\ ^*\right)} \{\Phi[\frac{\sqrt{n^*+\sqrt{2n^*}y}}{s} \times\left(\bar{x}-T+\Delta^*_{\ ,w}(c,y)\right)]$$
$$-\Phi[\frac{\sqrt{n^*+\sqrt{2n^*}y}}{s} \times\left(\bar{x}-T-\Delta^*_{\ ,w}(c,y)\right)]\} \phi(y)dy \tag{43}$$

其中

$$\Delta^*_{u,w}(c,y) = \sqrt{\frac{1}{w}\left(\left(\frac{d}{3c}\right)^2-\frac{ns^2}{n^*+\sqrt{2n^*}y}\right)} \tag{44}$$

由上之討論可知 (43) 式近似 (20) 式中之積分，而 (43) 式積分之數値計算亦可利用 IMSL [7] 之副程式 GQRUL 求得。

5. 實例應用

本節 以

，

s）之內圈直徑的長度（單位爲公釐），此製程共收集了 125 個資料，經過計算可以得到樣本平均數爲 $\bar{x} = 74.001$，樣本標準差爲 $s = 1.007\times10^{-2}$，若目標値取爲 $T = 74$，製程之規格上限與下限分別取爲 $USL = 74.05$ 與 $LSL = 73.95$，則 $\hat{C}_p(0,0) = 1.655$，$\hat{C}_p(1,0) = 1.617$，$\hat{C}_p(0,1) = 1.644$，$\hat{C}_p(1,1) = 1.606$，對不同之 $1-\alpha$ 値 (分別取 0.9, 0.95, 0.99 和 0.999)，經由第 4 節之數値計算方法，可以得到下表 1。一般而言，現場品管人員常利用製程能力指標的點估計値 $\hat{C}_p(u,w)$ 和某一事先設定之 C_0 値作比較，若 $\hat{C}_p(u,w) > C_0$ 時，則認爲製程合格，否則表示此製程有可能發生不良的危險，而 C_0 之取法有時依賴經驗，例如當製程能力指標爲 C_p 時，Montgometry [15] 建議在舊製程時 C_0 取爲 1.33，而在新製程時 C_0 取爲 1.5。若假設在本例中，C_0 取爲 1.5，則不同之製程能力指標的點估計値 $\hat{C}_p(0,0)$、$\hat{C}_p(1,0)$、$\hat{C}_p(0,1)$ 或 $\hat{C}_p(1,1)$ 均大於 1.5，亦即依照傳統之檢驗法則，此製程爲合格。Chou, Owen and Borrego [5] 曾指出這是較不適當的處理方法，因由點估計所得的單一數値，無法評估其估計的準確度，較適當的作法是利用製程能力指標之信賴區間下界，來判斷其製程能力，由表 1 中可以發現許多 $1-\alpha$ 下，大部分 $C_p(0,0)$、$C_p(1,0)$、$C_p(0,1)$ 或 $C_p(1,1)$ 之廣義信賴區間下界均小於 1.5，亦即 $C_p(0,0)$、$C_p(1,0)$、$C_p(0,1)$ 或 $C_p(1,1)$ 可能小於 1.5，也就是不能說此製程爲合格，而此製程有可能發生不良的危險，此結論和由點估計判斷之結果並不相同。Shiau, Chiang, and Hung [19] 亦得到一些

表 1. 不同之 $1-\alpha$ 值，製程能力指標之廣義信賴區間下界

Index	$1-\alpha$			
	0.9	0.95	0.99	0.999
$C_p(0,0)$ (i.e. C_p)	1.518	1.481	1.413	1.337
$C_p(1,0)$ (i.e. C_{pk})	1.472	1.429	1.346	1.247
$C_p(0,1)$ (i.e. C_{pm})	1.498	1.457	1.375	1.277
$C_p(1,1)$ (i.e. C_{pmk})	1.451	1.408	1.323	1.224

關於此例之貝氏信賴區間下界，並和本文有類似的結果。

6. 結論與討論

本文在製程之品質特性值爲常態分配的假設下，推導了一般化製程能力指標的廣義信賴區間下界及其數值計算方法，並且證明廣義信賴區間亦爲某種型式之貝氏信賴區間。此外，Vännman [27, 28] 曾提出另一型式之一般化製程能力指標，並且探討其估計量之性質，其定義爲:

$$C_{pa}(u,w)=\frac{d-|\mu-M|-u|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+w(\mu-T)^2}} \tag{45}$$

其中 u 和 w 爲大於或等於 0 之常數。類似 (16) 式，可以定義:

$$R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})=\frac{d-\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-M\right|-u\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-T\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{V}+w\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{V}}Z-T\right)^2}} \tag{46}$$

其中 Z 和 V 分別定義於 (14) 及 (15) 式，則 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之分配與未知參數無關，且 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之觀測值爲 $R(\underline{x},\underline{x},\underline{\Psi})=C_{pa}(u,w)$，由定義 2.1 知 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 是一個廣義樞紐量，類似定理 3.1 之作法，可以得到製程能力指標 $C_{pa}(u,w)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 廣義單尾信賴區間下界 c 爲滿足下列等式之解:

$$1-\alpha=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty I\left[\left(d-\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{v}}z-M\right|-u\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{v}}z-T\right|\right)\Big/\left\{3\sqrt{\frac{ns^2}{v}+w\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{v}}z-T\right)^2}\right\}\geq c\right]\phi(z)p_{\chi^2_{n-1}}(v)\,dz\,dv \tag{47}$$

此外，類似 (39) 式之作法，可以得到:

$$C_p(u,w)=\frac{d-|\mu-M|-u|\mu-T|}{3\sqrt{\sigma^2+w(\mu-T)^2}}=\frac{d-\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{ns^2\tau}}\mu'-M\right|-u\left|\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{ns^2\tau}}\mu'-T\right|}{3\sqrt{\frac{ns^2}{ns^2\tau}+w\left(\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{ns^2\tau}}\mu'-T\right)^2}} \tag{48}$$

比較 (46) 式可知 $C_{pa}(u,w)$ 之後驗分配和 $R(\underline{X},\underline{x},\underline{\Psi})$ 之分配相同，因此製程能力指標 $C_{pa}(u,w)$ 之廣義信賴區間亦爲某種型式之貝氏信賴區間。

而有關假設檢定 (hypothesis testing) 的問題，Tsui and Weerahandi [24] 和 Weerahandi [32] 亦提出類似廣義信賴區間的想法 - 廣義 p-值 (generalized p-value)，探討假設檢定問題，而一般化製程能力指標的假設檢定問題，應可由此概念探討，但需要進一步研究。

此外，本文均在製程之品質特性值爲常態分配的假設下作討論，近年來，亦有學者在製程之品質特性值爲非常態分配的假設下討論如何定義製程能力指標及其估計問題，如 Pearn and Chen [16]、Tang and Than [23]，Wu, Swain, Farrington, and Messimer [33] 和 Borges and Ho [2]等，而有關製程之品質特性值爲非常態分配時，製程能力指標之區間估計與假設檢定問題亦有待進一步探討。

致謝

作者感謝國科會計劃 NSC 89-2218-M-031-002 之補助研究及兩位審查委員的建議與指正，使本文更完善表達。

參考文獻

1. Bain, L. J. and M. Engelhardt, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics*, PWS-KENT Publishing Company, Boston (1992).
2. Borges, W. and L. L. Ho, "On the sampling distribution of clement's capability index," *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **29**, 121-138 (2000).
1. Chan, L. K., S. W. Cheng and F. A. Spiring, "A new measure of process capability : C_{pm}," *Journal of Quality Technology*, **20**, 162-175 (1988).
2. Cheng, S. W. and F. A. Spiring, "Assessing process capability : a bayesian approach," *IIE Transactions*, **21**, 97-98 (1989).
3. Chou, Y. M., D. B. Owen and S. A. Borrego, "Lower confidence limits on process capability indices," *Journal of Quality Technology*, **22**, 223-229 (1990).
4. Golub, G. H. and J. H. Welsch, "Calculation of Gaussian quadrature rules," *Mathematics of Computation*, **23**, 221-230 (1969).
5. IMSL Fortran 90 Library, *Version 3.0*, Visual Numerics Inc., Houston, Texas (1997).
6. Juran, J. M., *Jurans Quality Control Handbook*, McGraw-Hill, New York (1974).
7. Kane, V. E., "Process capability indices," *Journal of Quality Technology*, **18**, 41-52 (1986).
8. Kotz, S. and N. L. Johnson, *Process Capability Indices*, Chapman and Hall, London (1993).
9. Kotz, S. and N. L. Johnson, "Delicate relations among the basic process capability indices C_p, C_{pk} and C_{pm} and their modifications," *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, **28**, 849-866 (1999).
10. Kotz, S. and C. R. Lovelace, *Introduction to Process Capability Indices : Theory and Practice*, Arnold, London (1998).
11. Lee, P. M., *Bayesian Statistics : An Introduction*, Arnold, London (1997).
12. Meng, X. L., "Posterior predictive p-values," *The Annals of Statistics*, **22**, 1142-1160 (1994).
13. Montgometry, D. C. *Introduction to Statistical Quality Control*, Wiley, New York (1991).
14. Pearn, W. L. and K. S. Chen, "Estimating process capability indices for nonnormal pearsonian population," *Quality and Reliability Engineering International*, **11**, 386-388 (1995).
15. Pearn, W. L., S. Kotz and N. L. Johnson, "Distributional and inferential properties of process capability indices," *Journal of Quality Technology*, **24**, 216-233 (1992).
16. Shiau J. H., C. T. Chiang and H. N. Hung, "A Bayesian procedure for process capability assessment," *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 369-378 (1999).
17. Shiau J. H., C. T. Chiang and H. N. Hung, "A note on Bayesian estimation of process capability indices," *Statistics and Probability Letters*, **45**, 215-224 (1999).
18. Spiring F. A., "A unifying approaching to process capability indices," *Journal of Quality Technology*, **29**, 49-58 (1997).
19. Taguchi, G., "A tutorial on quality control and assurance – the Taguchi methods," ASA Annual Meeting, Las Vegas, Nevada (1985).
20. Taguchi, G., *Introduction to Quality Engineering*, Asian Productivity Organization, Tokyo, Japan (1986).
21. Tang, L. C. and S. E. Than, "Computing process capability indices for non-normal data : a review and comparative study," *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 339-353 (1999).
22. Tsui, K. W. and S. Weerahandi, "Generalized p-values in significance testing of hypothesis in the presence of nuisance parameters," *Journal of the American Statistical Association*, **84**, 602-607 (1989).
23. Vännman, K., "A unified approach to capability indices," *Statistica Sinica,* **5**, 805-820 (1995).
24. Vännman, K., "Distribution and moments in simplified form for a general class of capability indices," *Communications in Statistics – Theory and Methods,* **26**, 159-180 (1997).
25. Vännman, K., "A general class of capability indices in the case of asymmetric tolerances," *Communications in Statistics – Theory and Methods,* **26**, 2049-2072 (1997).
26. Vännman, K., "Capability indices when tolerance are asymmetric," In B. Abraham (Ed.), *Quality Improvement Through Statistical Method,* Birkhäuser, Berlin, 79-95 (1998).
27. Vännman, K. and S. Kotz, "A superstructure of capability indices – distributional properties and implications," *Scandinavian Journal of Statistics*, **22**, 477-491 (1995).
28. Vännman, K. and S. Kotz, "A superstructure of capability indices – asymptotics and its implications," *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **2**, 343-360 (1995).
29. Weerahandi, S., "Generalized confidence intervals," *Journal of the American Statistical Association*, **88**, 899-905 (1993), correct in **89**, 726 (1994).
30. Weerahandi, S., *Exact Statistical Methods for Data Analysis*, Springer-Verlag, New York (1995).
31. Wu, H. H., J. J. Swain, P. A. Farrington and S. L. Messimer, "A weighted variance capability index for general non-normal processes," *Quality and Reliability Engineering International*, **15**, 397-402 (1999).

作者簡介

張揖平　國立中央大學統計碩士、博士，現任東吳大學商用數學系副教授；研究領域為可靠度分析、轉折點模型統計分析。

(Received March 2000; revised April 2000; accepted June 2000)

GENERALIZED CONFIDENCE INTERVALS FOR THE PROCESS CAPABILITY INDICES

Yi-Ping Chang
Department of Business Mathematics
Soochow University
56, Kuei-Yang Street, Section 1, Taipei, Taiwan, 100, R.O.C.

ABSTRACT

In this paper, we construct interval estimates for the process capability indices by using the concept of generalized confidence interval. It can be shown that the generalized confidence intervals are equivalent to the Bayesian confidence intervals.

Keywords: process capability index, generalized confidence interval, Bayesian confidence interval